

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(đề thi gồm 01 trang)

Bài 1. (4 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\sin x + 2\cos^3 x = \cos 2x$

b) $\sqrt[3]{3x+24} = 9x^3 + 2x - 8$

Bài 2. (3 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4 = y^3 - 6y^2 + 9y \\ x^2 + y^2 + 4 = 2x + 4y \end{cases}$$

Bài 3. (3 điểm)

Cho 2 số thực x, y thỏa điều kiện: $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 - 3(x + y)$

Bài 4. (4 điểm)

Tìm m để phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - 5x + 1) = mx^2$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Bài 5. (4 điểm)

Hai hình chóp tam giác đều có chung chiều cao, đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia. Mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên $l = 8\text{cm}$ của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc 30° . Cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc 60° . Tìm thể tích phần chung của hai hình chóp.

Bài 6. (2 điểm)

Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng 2 chữ số đầu bằng tổng 2 chữ số cuối ?

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (4 điểm)

a) $\sin x + 2\cos^3 x = \cos 2x \Leftrightarrow \sin x + 2\cos^3 x = 2\cos^2 x - 1$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin x + 2\cos^2 x(\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)[1 + 2(1 - \sin x)(\cos x - 1)] = 0 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (1,5đ)$$

b) $\sqrt[3]{3x+24} = 9x^3 + 2x - 8 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{3x+24} = 27x^3 + 6x - 24 \quad (0,5đ)$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{3x+24} + 3x + 24 = 27x^3 + 9x \quad (0,5đ)$$

Đặt $a = \sqrt[3]{3x+24}, b = 3x$, ta được $a^3 + 3a = b^3 + 3b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+24} = 3x \Leftrightarrow x = 1 \quad (1đ)$$

Bài 2. (3 điểm)

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 4 = y^3 - 6y^2 + 9y \\ x^2 + y^2 + 4 = 2x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 - 3(x-1) = (y-2)^3 - 3(y-2) \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases} \quad (1đ)$$

Đặt $x-1 = a, y-2 = b$

Ta được hệ $\begin{cases} a^3 - 3a = b^3 - 3b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(ab-2) = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1,5đ)$

Suy ra $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (0,5đ)$

Bài 3. (3 điểm)

Cho 2 số thực x, y thỏa điều kiện: $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 - 3(x+y)$

$$x^2 + y^2 + xy = x + y + 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 - (x+y) - 1 = xy \quad (0,5đ)$$

Từ bất đẳng thức $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, ta suy ra $-\frac{2}{3} \leq x+y \leq 2 \quad (0,5đ)$

Đặt $t = x+y$, ta có $P = f(t) = -2t^3 + 3t^2$ với $t \in [-\frac{2}{3}, 2] \quad (0,5đ)$

$$f'(t) = -6t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1 \quad (0,5đ)$$

GTNN của $P = f(2) = -4$ khi $x = y = 1 \quad (0,5đ)$

GTLN của $P = f(-\frac{2}{3}) = \frac{52}{27}$ khi $x = y = -\frac{1}{3} \quad (0,5đ)$

Bài 4. (4 điểm)

Tìm m để phương trình: $(x^2 - x + 1)(x^2 - 5x + 1) = mx^2$ có đúng hai nghiệm phân biệt.
 Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình. (0,25đ)

Phương trình tương đương với $(x + \frac{1}{x} - 1)(x + \frac{1}{x} - 5) = m$ (1) (0,25đ)

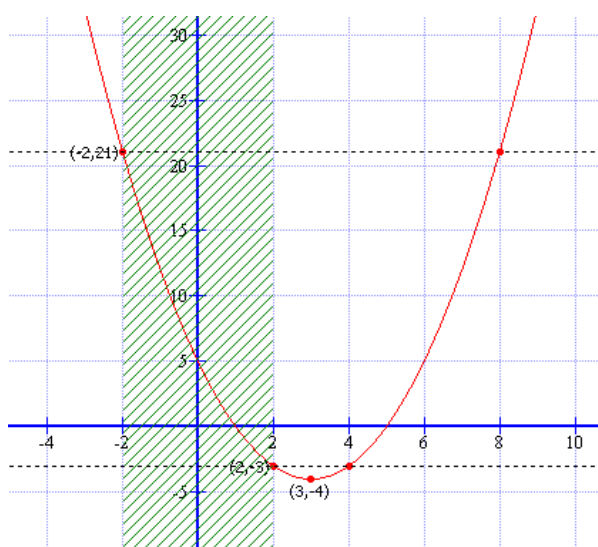
Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ (*) ($t \leq -2 \vee t \geq 2$) (0,5đ)

+ **Nhận xét:**

(*) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $t < -2 \vee t > 2$ (0,5đ)

(*) có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi $t = -2 \vee t = 2$ (0,5đ)

(1) $\Leftrightarrow (t - 1)(t - 5) = m \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = m$ (2) (0,5đ)



Xét hàm số $f(t) = t^2 - 6t + 5$

Đồ thị (0,5đ)

Nhìn vào đồ thị ta thấy:

phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt
 khi và chỉ khi: $m = -4 \vee -3 < m < 21$ (1đ)

Bài 5. (4 điểm)

Gọi 2 hình chóp tam giác đều là: $O.ABC$ và $O'.A'B'C'$ với O là tâm của tam giác $A'B'C'$ và O' là tâm của tam giác ABC .

Theo bài ra thì OO' là đường cao chung của 2 hình chóp.

Gọi D, E, F là các giao điểm của các cặp cạnh bên tương ứng của 2 hình chóp.

Chứng minh: $EF \parallel BC \parallel B'C'$; $DE \parallel AB \parallel A'B'$, $DF \parallel AC \parallel A'C'$ (0,75đ)

Chứng minh $(DEF) \parallel (ABC) \parallel (A'B'C')$ và $\triangle DEF$ đều (0,75đ)

Phần thể tích chung của 2 hình chóp là thể tích của khối đa diện $ODEFO'$ (0,25đ)

Ký hiệu V là thể tích đó thì $V = \frac{1}{3} OO' \cdot S_{\triangle DEF}$ (0,25đ)

$\triangle OO'C$ vuông tại O' nên $OO' = l \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$ (0,25đ)

Do tính đối xứng nên OO' đi qua tâm I của $\triangle DEF$. (0,5đ)

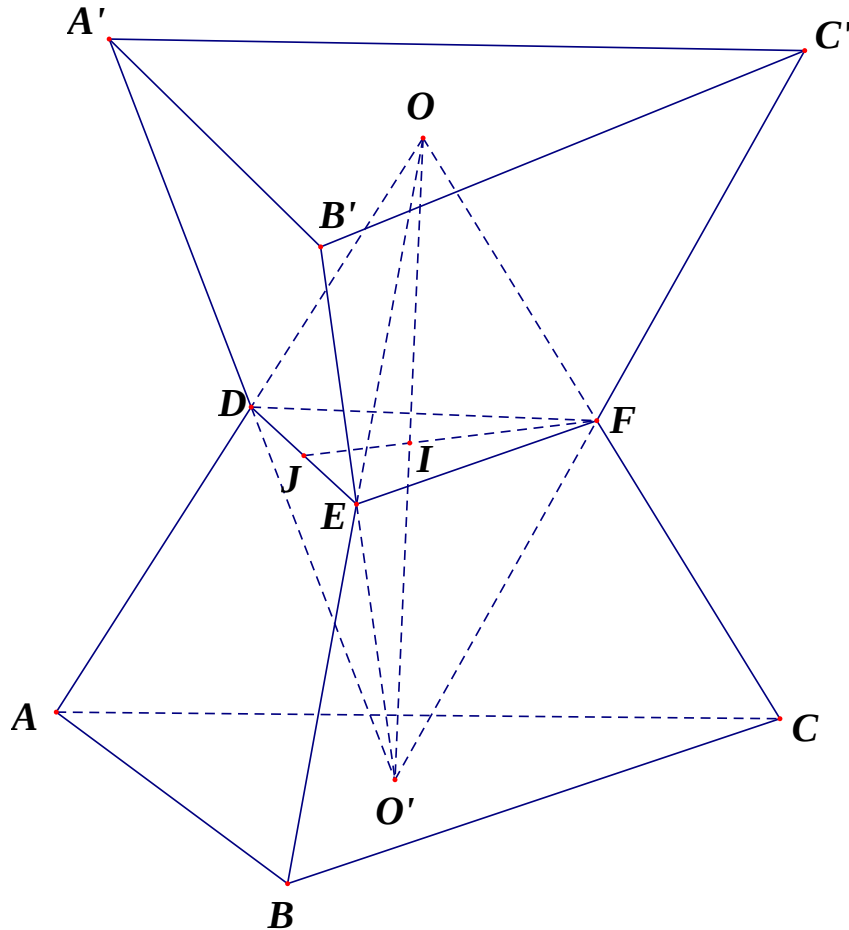
Trong $\triangle IOF$ ta có: $OI = IF \cot 30^\circ = IF\sqrt{3}$ (0,25đ)

Trong $\triangle IO'F$ có: $O'I = IF \cot 60^\circ = \frac{IF}{\sqrt{3}}$ (0,25đ)

Suy ra $OO' = \frac{4}{\sqrt{3}} IF \Rightarrow IF = \frac{\sqrt{3}}{4} OO' = 3 \Rightarrow EF = 3\sqrt{3}$ (0,25đ)

$\Rightarrow S_{\triangle DEF} = \frac{EF^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ (0,25đ)

Vậy thể tích phần chung của 2 hình chóp là: $V = 27 \text{ cm}^3$ (0,25đ)



Bài 6. (2 điểm)

Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng 2 chữ số đầu bằng tổng 2 chữ số sau ?

Gọi số có 4 chữ số là $\overline{abcd}$ với $a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 9\}, a \neq 0, a + b = c + d$

Ta lần lượt xét số nghiệm của các phương trình $a + b = k, c + d = k$ với k từ 0 đến 18.

- $k = 0$: $a = b = 0$ (loại)
- $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$: pt $a + b = k$ có k nghiệm và pt $c + d = k$ có $k + 1$ nghiệm.

Trong trường hợp này số các số thỏa mãn YCBT là $\sum_{k=1}^9 k(k+1) = 330$ (1đ)

- $k \in \{10, 11, \dots, 18\}$: cả 2 pt $a + b = k, c + d = k$ đều có $19 - k$ nghiệm.

Trong trường hợp này số các số thỏa mãn YCBT là $\sum_{k=10}^{18} (19 - k)^2 = 285$

Vậy số các số thỏa mãn YCBT là $330 + 285 = 615$. (1đ)

Cách khác:

Ứng với số $\overline{abcd}$ thỏa YCBT có đúng 1 số dạng $\overline{ab(9-c)(9-d)}$

Như vậy thay vì đếm những số thỏa YCBT ta đếm những số có tổng bằng 18.

Tức là tìm số nghiệm của phương trình: $a + b + c + d = 18$

Số nghiệm của phương trình $a + b + c + d = 18$ là : $C_{21}^3 - 4C_{11}^3 = 670$

Số nghiệm của phương trình $b + c + d = 18$ là: $C_{20}^2 - 3C_{10}^2 = 55$

Vậy số các số thỏa mãn YCBT là $670 - 55 = 615$.